Algebra e Geometria

November 11, 2025

1 Insiemi

L'insieme è una collezione di oggetti.

esempi:

- $\mathbb{N}$: numeri naturali
- $\mathbb{Z}$: numeri interi
- $\mathbb{Q}$ numeri razionali
- $\mathbb{R}$: numeri reali

1.1 Simbologia

- $x \in \mathbb{A}$, x appartiene all'insieme $\mathbb{A}$
- $x \notin \mathbb{A}$, x non appartiene all'insieme $\mathbb{A}$
- $\mathbb{Z} \geq 0 = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$
- $\emptyset$ = insieme vuoto
- $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$: $\mathbb{A}$ è contenuto in $\mathbb{B} \longrightarrow \forall x \in \mathbb{A} : x \in \mathbb{B}$
- $\mathbb{A} \subsetneqq \mathbb{B}$: $\mathbb{A}$ è contenuto strettamente in $\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ e $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$
- $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$: Intersezione $\longrightarrow \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{x : x \in \mathbb{A} \wedge x \in \mathbb{B}\}$
- $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$: Unione $\longrightarrow \mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{x : x \in \mathbb{A} \vee x \in \mathbb{B}\}$
- $\mathbb{A} \backslash \mathbb{B}$: Differenza insiemistica $\longrightarrow \mathbb{A} \backslash \mathbb{B} = \{x \in \mathbb{A} : x \notin \mathbb{B}\}$
- $\mathbb{A}^c, \bar{\mathbb{A}}$: Complementare $\longrightarrow \mathbb{B} \backslash \mathbb{A} = \mathbb{A}^c = \bar{\mathbb{A}}$

1.2 Formule di Morgan

- $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})^c = \mathbb{A}^c \cup \mathbb{B}^c$
- $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})^c = \mathbb{A}^c \cap \mathbb{B}^c$

1.3 Prodotto cartesiano

Dati due insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, il prodotto cartesiano $\mathbb{A} * \mathbb{B}$ è:

$$\mathbb{A} * \mathbb{B} = \{(a, b) : a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}\}$$

2 Funzioni

Dati due insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$:

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$$

- $\mathbb{A}$ = Dominio della funzione
- $\mathbb{B}$ = Codominio della funzione

2.1 Composizione di funzioni

Date le funzioni $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ e $g : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$:

$$\mathbb{A} \to \mathbb{C} \implies a \to g(f(a))$$

La funzione composta si indica con: $gof \longrightarrow$ "g composto da f"

2.2 Classificazione delle funzioni

Una funzione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ può essere:

Iniettiva $\forall a \in \mathbb{A} : \exists b \in \mathbb{B} : a \to b$

Suriettiva $\mathbb{A} = \mathbb{B}$

Biettive entrambe le precedenti

3 Numeri complessi

Un numero complesso viene rappresentato nel seguente modo:

$$z = a + bi$$

- a è la parte reale
- b è la parte immaginaria
- i è l'unità immaginaria

$\mathbb{C} =$ insieme dei numeri complessi

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

3.1 Operazioni con i numeri complessi

Somma $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Moltiplicazione $(a + bi) * (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

3.2 Simbologia

- $\bar{z}$ è il coniugato del numero reale $z \longrightarrow z = a + bi \implies \bar{z} = a - bi$
- $|z|$ è il modulo del numero reale $z \longrightarrow z = a + bi \implies |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$
- $z * \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$
- z^{-1} è l'inverso del numero reale $z \longrightarrow z = a + bi \implies z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

3.3 Formula di Eulero

Dati $r \in \mathbb{R}$ e $M \in (0, 2\pi)$:

$$z = r(\cos(M)) + ir(\sin(M)) \in \mathbb{C} = r(\cos(M) + i\sin(M)) = re^{iM} \implies |z| = r, \bar{z} = re^{-iM}$$

esempio:

$e^{i\pi} + 1 = 0$

3.4 Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio a coefficienti complessi ammette una radice complessa.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

- $n =$ grado del polinomio
- $a \in \mathbb{C} =$ coefficienti
- $\forall z \in \mathbb{C}$ possiamo considerare $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \in \mathbb{C}$

4 Gruppi

Dato l'insieme $\mathbb{G}$ ed un'operazione binaria di tipo $P_1 : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$, tale che:

- $\exists$ un elemento neutro per l'operazione
- l'operazione deve essere associativa
- $\forall$ elemento di $\mathbb{G}$ ammette un'inverso

Possiamo definire il gruppo $(\mathbb{G}, P_1)$.

esempi:

- $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo
- $(\mathbb{Q}, *)$ non è un gruppo, poiché 0 non ha un elemento inverso
- $(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo
- $(\mathbb{C}, +)$ è un gruppo

4.1 Gruppo commutativo

Un gruppo si dice commutativo (o abeliano) se l'operazione $*_1$ è anche commutativa.

4.2 Sottogruppi

Se un sottoinsieme del gruppo $(\mathbb{G}, P_1)$ rispetta le 3 condizioni di esistenza per i gruppi con l'operazione P_1, allora esso può essere definito un sottogruppo.

5 Anelli

Dato l'insieme $\mathbb{A}$ e due operazioni $P_1, P_2 : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tali che:

- $(\mathbb{A}, P_1)$ sia un gruppo abeliano
- P_2 è associativa
- valgono le leggi distributive tra le due operazioni

esempi:

- $(\mathbb{Z}, +, *)$ è un anello
- $(\mathbb{R}[x], +, *)$ è un anello
- $(\mathbb{M}(n), +, *)$ è un anello

5.1 Condizioni particolari

- se P_2 è commutativa, l'anello si dice commutativo
- se P_2 ha un elemento neutro, $\mathbb{A}$ si dice: "anello con unità"
- se $(\mathbb{A} \backslash \vec{0}, P_2)$ è un gruppo, allora $\mathbb{A}$ si dice anello di divisione o con corpo
- quando il corpo è commutativo, $\mathbb{A}$ è un *campo*

6 Vettori

I vettori sono degli elementi di uno spazio vettoriale, perciò possono essere sommati tra di loro e moltiplicati per dei numeri detti scalari.

$\vec{v} = (x_1, y_1)$

$\vec{w} = (x_2, y_2)$

Somma $\vec{v} + \vec{w} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Moltiplicazione $\lambda \vec{v} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

6.1 Spazio vettoriale

Lo spazio vettoriale è una struttura algebrica composta da:

- Un campo $\mathbb{K}$ di elementi scalari
- Un insieme di vettori $\mathbb{V}$
- due operazioni binarie interne (solitamente somma + e prodotto $*$)
- $+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$
- $* : \mathbb{K} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

Un spazio vettoriale è tale affinché $(\mathbb{V}, +)$ sia commutativo.

6.2 Sottospazio vettoriale

Dati $\mathbb{K}$ campo, V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $W \subseteq V$, W è un sottospazio vettoriale di V se:

- $\vec{0} \in W$
- $\forall\ \vec{v}, \vec{w} \in W : \vec{v} + \vec{w} \in W$
- $\forall\ \lambda \in \mathbb{K} : \forall\ \vec{v} \in W : \lambda\vec{v} \in W$

6.3 Formula di Grassman

La formula di Grassman è una relazione tra le dimensioni di due sottospazi di uno stesso spazio vettoriale di dimensione finita.

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \wedge W)$$

6.4 Somma diretta

$$U \oplus W \text{ se } U \cap W = \{\vec{0}\}$$

U e W sono in somma diretta se e solo se:

$$B_u \cup B_w = B_{u+w} : \text{ è una base di } U + W$$

6.5 Sottospazio affine

Un sottospazio affine di V è un sottoinsieme nella forma:

$$\mathbb{A} = \{\vec{v} + \vec{w} : \vec{w} \in W\}$$

7 Combinazioni lineari

Dato un $\mathbb{V}$ $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e degli elementi di $\mathbb{K}$ (λ_i), si dice combinazione lineare di n vettori $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ una qualunque somma del seguente tipo:

$$V = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n : \lambda_i \in \mathbb{K}$$

Si può dire che i vettori della combinazione lineare sono:

Linearmente dipendenti se esiste una combinazione lineare a coefficienti non nulli che da come risultato un vettore nullo (i vettori sono paralleli)

Linearmente indipendenti se l'unica loro combinazione lineare che da come risultato il vettore nullo, è quella con tutti i coefficienti nulli (i vettori non sono paralleli)

7.1 Span

Dati dei vettori $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ di un $\mathbb{V}$ $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, lo span è l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori con coefficienti λ_i:

$$span(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \{\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n : \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

Lo $span(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}$ e si può dire "sottospazio vettoriale generato da $\mathbb{V}$".

7.2 Base

I vettori $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ si dicono ”sistema di generatori” di $\mathbb{V}$ se ogni vettore di $\mathbb{V}$ si può ottenere come combinazione lineare $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.
I vettori $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sono una base se:

- Sono linearmente indipendenti
- Sono un sistema di generatori

Se $\mathbb{V}$ ha una base costituita da n vettori, allora si dice che la dimensione di $\mathbb{V}$ è n:

$$dim\mathbb{V} = n$$

Se conosciamo la dimensione dello spazio vettoriale $\mathbb{V}$ e troviamo un insieme di vettori linearmente indipendenti, allora possiamo dire che quell'insieme di vettori è una base di $\mathbb{V}$.

8 Matrici

Possiamo definire una matrice come una ”griglia di numeri”

$$a_{ij} \in \mathbb{K} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Una matrice $m \times n$ dove m sono le righe e n sono le colonne

8.1 Notazione

$$A = M(m, n, \mathbb{K}) = (a_{ij}) : i = 1 \ldots m : j = 1 \ldots n$$

- A^i è la i-esima colonna $\in \mathbb{K}^m \to A = \left(A^1 | \ldots | A^n\right)$
- A_j è la j-esima colonna $\in \mathbb{K}^n \to A = \begin{pmatrix} A_1 \\ - \\ \vdots \\ - \\ A_m \end{pmatrix}$

8.2 Pivot

Data una riga R_i di una matrice $M(m, n, \mathbb{K})$, il pivot di R_i è il primo coefficiente non nullo partendo da sinistra.

8.3 Matrice a scalini

Data una matrice $M(m, n, \mathbb{K})$, essa può essere detta ”a scalini” se $\forall i$, considerando la i-esima riga R_i e il rispettivo pivot a_{ij}:

$$a_{kh} = 0 \ \forall \begin{cases} k > i \\ h < j \end{cases}$$

esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.4 Rango

Dato $A \in M(m, n, \mathbb{K})$:

$$rg(A) = dim\ span(A^1, \dots, A^n, \vec{b}) \leq \mathbb{K}^m$$

- Se A' è una matrice ottenuta da A usando le mosse di Gauss, allora $rg(A') = rg(A)$
- $rg(A) \leq min(m, n)$
- $rgr(A) = dim\ span(A_1, \dots, A_m) \leq n$: rango per riga
- $rgr(A') = rgr(A)$, se A' è una matrice ottenuta usando le mosse di Gauss

8.5 Trasposta

La trasposta di una matrice:

$$A \in M(m, n, \mathbb{K}) = (a_{ij}) \implies {}^tA \in M(n, m, \mathbb{K}) = (a_{ji})$$

8.6 Sotto-matrice

La sotto-matrice B di A è una matrice $B \in M(k, h, \mathbb{K})$ con $k \leq m$ e $h \leq n$, ottenuta da A togliendo $m-k$ righe e $n-h$ colonne.

8.7 Matrice dei cofattori

Dato $A \in M(m, n, \mathbb{K})$:

$$C_{ij}(A) \in M(m-1, n-1, \mathbb{K})$$

La matrice dei cofattori di una matrice A si ottiene togliendo la i-esima riga e la j-esima colonna dalla matrice A.

- se $B \leq A$, allora $rg(B) \leq rg(A)$
- $\forall$ combinazione lineare di $A^1, \dots, A^n$ ottengo una combinazione lineare di $B^1, \dots, B^k$

8.8 Determinante

Dato $A \in M(n, \mathbb{K})$:

Il determinante di A è uno scalare che si può ottenere soltanto da matrici quadrate, e si ottiene nei seguenti modi:

1. $n = 1 \implies detA = a$
2. $n = 2 \implies detA = ad - bc$
3. $n \geq 3 \implies detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j}\ detC_{1j}(A)$

Per le matrici triangolare superiore, matrici diagonali e matrici identità:

$$detA = \text{ prodotto degli elementi sulla diagonale}$$

Se una matrice A ha due righe o colonne uguali $\implies detA = 0$

8.9 Determinante e le mosse di Gauss

Il determinante è una funzione che prende in entrata una matrice e restituisce uno scalare. Questa funzione si relaziona con le mosse di Gauss, nella seguente maniera:

1. $A_i \leftrightarrow A_j \implies det(A') = -det(A)$
2. $A_i \to \lambda A_i \implies det(A') = \lambda det(A)$
3. $A_i \to A_i + \lambda A_j \implies det(A') = det(A)$

8.10 Moltiplicazione righe per colonne

Date due matrici generiche, generalmente è impossibile moltiplicarle. Se le matrici assumono le seguenti forme, allora la moltiplicazione è possibile:

$A \in M(m, n, \mathbb{K})$

$B \in M(n, k, \mathbb{K})$

$$AB \in M(m, k, \mathbb{K})$$

9 Sistemi

Segue un esempio di sistema lineare generico a coefficienti in $\mathbb{K}$:

Dati $a_{ij} \in \mathbb{K}, b_i \in \mathbb{K}$:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Un sistema lineare può essere:

Omogeneo $b_1, \ldots, b_m = 0$

Non omogeneo $\exists\ b \neq 0$

L'insieme delle soluzioni viene indicato come:

$$W_S = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n : S(\vec{x}) = 0\}$$

Semplificare un sistema significa ottenere un altro insieme di soluzioni $W_{S'}$ tale che:

$$W_{S'} = W_S$$

9.1 Mosse di Gauss

1. Scambiare due righe: $R_i \leftrightarrow R_j$
2. Moltiplicare una riga per uno scalare: $R_i \to \lambda R_i : \lambda \in \mathbb{K}$
3. Sostituire una riga con se stessa sommata ad un multiplo di un'altra riga: $R_i \to R_i + \lambda R_j : \lambda \in \mathbb{K}$

Applicando le 3 mosse di Gauss ad un sistema lineare S, deriviamo il sistema S' con il medesimo numero di soluzioni rispetto al sistema originale S.

9.2 Matrice dei coefficienti

$$A_S = A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m, n, \mathbb{K})$$

9.3 Vettore dei termini noti

$$\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{K}^m$$

9.4 Matrice del sistema

$$C_S = C = (A|\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in M(m, n, \mathbb{K})$$

9.5 Sistema lineare omogeneo associato

$$S_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$W_S = \vec{x} + W_{S_0}$$

9.6 Rango

Il rango di un sistema S è:

$$rg(S) = \dim span(C^1, \ldots, C^n, \vec{b}) \subseteq \mathbb{K}^m$$

Il rango è sempre minore del numero di righe m. Se la matrice del sistema C è in forma di "Gauss-Jordan":

$$rg(S) = n\text{-pivot}$$

Possiamo dire che:

$$rg(S) \leq \min(m, n)$$

9.7 Teorema di Rouché-Capelli

Dato un sistema lineare S e il sistema lineare omogeneo associato S_0, S ha la soluzione se e soltanto se:

$$rg(S) = rg(S_0)$$

Se $W_S \neq \emptyset$, allora la $dim(W_S) = n - rg(S_0)$.