Matematica Applicata

November 18, 2025

1 Introduzione

1.1 Matematici di rilevanza storica

600 Pascal, Fermat, Huygens

700 Bernoulli, Laplace, Gauss, De Moivre, Poisson

800 Markov, Cebycev, Lyapunov

900 Kolmogorov

1.2 Diversi tipi di problemi

- Statistica descrittiva
- Probabilità
- Inferenza statistica

1.3 Notazione

Esiti possibili risultati di un esperimento: $e_1, e_2, e_3, \ldots$

Evento un insieme di uno o più esiti: $E = \{e_1, e_3, e_5\}$

Spazio campione insieme di tutti gli esiti di un esperimento: S oppure Ω

2 Probabilità

2.1 Definizione classica di probabilità

Dato un esperimento che presenta più esiti equiprobabili possibili, si definisce probabilità dell'evento $E \subset S$:

$$P(E) = \frac{n \text{ di esiti favorevoli}}{n \text{ di esisti totali}}$$

Dove il numero di esiti totali deve essere finito.

2.2 Definizione frequentista

Ripetuto N volte un esperimento che presenta più esiti possibili, si definisce probabilità dell'evento $E \subset S$:

$$P(E) = \frac{n \text{ di esperimenti in cui si verifica } E}{N}$$

2.3 Principio di enumerazione o fondamentale del calcolo combinatorio

Si considerino 2 esperimenti: il primo presenta n esiti e per ciascuno di questi esiti, il secondo ne presenta m, allora, se le sequenze distinte di esiti danno luogo a risultati diversi, gli esiti dei due esperimenti saranno complessivamente $n \times m$.

2.4 Disposizioni semplici

Si dicono disposizioni semplici di n oggetti di classe $K : (K \leq n)$ tutti gli allineamenti (sequenze ordinate) di K elementi presi dall'insieme di n oggetti.

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2.5 Disposizioni con ripetizioni

Si dicono disposizioni con ripetizioni di n oggetti distinti di classe K, gli allineamenti che si possono formare prendendo K oggetti non necessariamente diversi dagli altri n dati.

$$D^R_{n,k} = n^k$$

2.6 Permutazioni semplici

Dati n oggetti distinti, si dicono permutazioni semplici di n elementi gli allineamenti che si possono formare usando tutti gli n oggetti diversi.

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$$

2.7 Permutazioni con ripetizioni

Dati n oggetti non necessariamente distinti, si definiscono permutazioni con ripetizioni, gli allineamenti che si possono costruire a partire da gli n oggetti dati.

$$P^R_n = \frac{n!}{K_1!K_2!\dots K_j!}$$

se tra gli n oggetti ce ne sono K_1 del primo tipo, K_2 del secondo tipo, $\dots$ K_j del j-esimo tipo.

$$n = \sum_{i=1}^{j} K_i$$

2.8 Combinazioni semplici

Dati n oggetti distinti, si dicono combinazioni semplici di n oggetti di classe $K(K \leq n)$, gli insiemi che si possono formare a partire dagli n dati:

$$C_{n,k} = \genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{D_{n,k}}{P_k}$$

2.9 Eventi complementari

Dati $E, F \subset S$, $E^c \subset S$ è l'insieme di tutti gli esiti di S che non stanno in E.

2.9.1 Proprietà

- $E \cup E^c = S$
- $E \cap E^c = \emptyset$
- $(E \cup F)^c = E^c \cap F^c$
- $(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$

2.10 Definizione assiomatica di probabilità

Dato un esperimento a cui è associato uno spazio campione S, allora per ogni evento di S è possibile definire un numero $P(E)$, detto probabilità, tale che:

1. $P(E) \in [0, 1]$
2. $P(S) = 1$
3. Dati gli eventi $E_1, E_2, \dots, E_n$ disgiunti: $P(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k)$

2.10.1 Conseguenze immediate

1. Dato uno spazio campione S ed $E \subset S \implies P(E^c) = 1 - P(E)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Dati uno spazio campione S e due eventi E ed F con $E \subset F$, allora $\implies P(E) \leq P(F)$
4. Dati uno spazio campione S e due eventi E ed F, allora $\implies P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

2.11 Probabilità di un evento per uno spazio campio di esiti equiprobabili

$S = \{e_1, \dots, e_n\}$ per $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ e $n < +\infty$

esiti naturalmente disgiunti: $e_i \cap e_k \emptyset$ se $i \neq k$

$$S = e_1 \cup \dots \cup e_n = \bigcup_{j=1}^{n} e_j \implies P(S) = \sum_{j=1}^{n} P(e_j) = \sum_{j=1}^{n} p = np \implies p = \frac{1}{n}$$

$E \subset S, E = \{e_1, \dots, e_k\}$

$$P(E) = P(\bigcup_{l=1}^{k} e_l) = \sum_{l=1}^{k} P(e_l) = \sum_{l=1}^{k} p = kp \implies p = \frac{k}{n}$$

Possiamo vedere che:

$$P(E) = \frac{k}{n} = \frac{\text{numero di esiti contenuti in } E}{\text{numero di esiti totali in } S} \leftarrow \text{definizione classica di probabilità}$$

2.12 Probabilità condizionata

Dato uno spazio campione S e due eventi $E, F \subset S$ con $P(F) \neq 0$, allora si definisce probabilità condizionata di E condizionata da F

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

2.13 Due eventi indipendenti

Dato uno spazio campione S e due eventi $E, F \subset S$, essi si dicono indipendenti se:

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

2.13.1 Conseguenze

Se $P(F) \neq 0$, $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \implies$ se sono indipendenti $\implies \frac{P(E)P(F)}{P(F)} = P(E)$

2.13.2 Proprietà

Dati uno spazio campione S e due eventi indipendenti $E, F \subset S$, allora:

- E ed F^c sono indipendenti
- E^c ed F sono indipendenti
- E^c ed F^c sono indipendenti

2.14 Tre eventi indipendenti

Dati lo spazio campione S e tre eventi $A, B, C \subset S$, essi si dicono indipendenti se:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

Generalizzando, ad n eventi, occorre considerare tutte le intersezioni.

2.15 Partizione di uno spazio campione

Dato uno spazio campione S, si dice partizione di S una suddivisione in eventi $E_1, \dots, E_n$ tali che:

- $\bigcup_{k=1}^n E_k = S$
- $E_i \cap E_j = \emptyset$ se $i \neq j$

Gli elementi della partizione sono detti ipotesi e si indicano solitamente con la lettera H.

2.16 Formula delle probabilità totali

Dati uno spazio campione S, una sua partizione $\{H_1, \dots, H_n\}$ e un evento $E \subset S$, allora:

$$P(E) = \sum_{k=1}^{n} P(E|H_k)P(H_k)$$

2.17 Teorema di Bayes

Dati uno spazio campione S, una sua partizione $\{H_1, \dots, H_k\}$ e un evento $E \subset S$ con $P(E) \neq 0$, allora:

$$P(H_j|E) = \frac{P(E|H_j)P(H_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(E|H_k)P(H_k)} = \frac{P(E|H_j)P(H_j)}{P(E)}$$

3 Variabili casuali

Ad ogni esperimento è possibile associare una variabile casuale a valori reali, i cui valori variano in base all'esito dell'esperimento.

3.1 Variabili casuali discrete

X si dice variabile casuale discreta, se $X \in \{x_1, \dots, x_n\}$ con $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ per $x_j \in \mathbb{R}$.

3.1.1 Funzione di massa di probabilità

Si associa alla variabile casuale discreta X, una funzione:

$$\begin{array}{rcl} p & : & \mathbb{R} \to [0,1] \\ p(y) & = & P(X = y) \end{array}$$

3.1.2 Proprietà

- $p(y) \in [0, 1]$
- $1 = P(S) = P(X = x_1 \cup \dots \cup X = x_n) = \sum_{k=1}^n P(X = x_k) = \sum_{k=1}^n p(x_k)$

3.1.3 Funzione di distribuzione di probabilità (o di ripartizione)

Data la variabile casuale discreta X, si associa ad essa la funzione (detta di ripartizione o distribuzione di probabilità):

$$\begin{array}{rcl} F & : & \mathbb{R} \to [0,1] \\ F(y) & = & P(X \leq y) \end{array}$$

3.2 Variabili casuali continua

Una variabile casuale X si dice continua se ad essa è associata una funzione di densità di probabilità $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tale che:

$$P(X \in B) = \int_B f(y)dy$$

$\forall B < \mathbb{R}$

3.2.1 Proprietà

- $f(y) \geq 0 \forall y \in \mathbb{R}$
- $1 = P(S) = P(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy$
- se X è una variabile casuale continua e $a \in \mathbb{R}$:

$$P(X \leq a) = P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

- sia X una variabile casuale continua con funzione di ripartizione $F(y)$ e siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

3.2.2 Funzione di distribuzione di probabilità (o di ripartizione)

Per una variabile casuale continua X:

$$\begin{array}{rcl} F(y) & = & P(X \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(X)dx \\ f(y) & = & \frac{dF(y)}{dy} \end{array}$$

3.2.3 Proprietà della funzione di distribuzione di probabilità

- $F(y) \in [0,1] \forall y \in \mathbb{R}$
- $\lim_{y \to -\infty} F(y) = P(X \leq -\infty) = 0$
- $\lim_{y \to +\infty} F(y) = P(X \leq +\infty) = P(X \in \mathbb{R}) = 1 = P(S)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b \implies F(a) \leq F(b)$

3.3 Coppie di variabili casuali discrete

Dato un esperimento si associano ad esso due variabili casuali X e Y che si dicono discrete se:

$$\begin{array}{c} X \in \{x_1, \ldots, x_n\} \\ Y \in \{y_1, \ldots, y_m\} \\ n, m \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \end{array}$$

3.3.1 Funzione di massa di probabilità congiunta

$$\begin{array}{c} p : \mathbb{R}^2 \to [0,1] \\ p(a,b) = P(X = a \cap Y = b) = P(X = a, Y = b) \forall a, b \in \mathbb{R} \end{array}$$

Proprietà:

- $p(a,b) \in [0,1] \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1$

3.3.2 Funzioni di massa di probabilità marginali

$$\begin{array}{c} p_x(a) = P(X = a) = P(X = a, Y \leq +\infty) = \sum_{j=1}^{m} p(a, y_j) \text{ con } a \in \mathbb{R} \\ p_y(b) = P(Y = b) = P(X \leq +\infty, Y = b) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, b) \text{ con } b \in \mathbb{R} \end{array}$$

esempio, date 12 batterie, di cui 3 cariche, 4 poco cariche e 5 non funzionanti, ne vengono scelte 3 a caso. X = numero di batterie cariche
Y = numero di batterie poco cariche estratte. Per (X, Y) determinare $p(a,b)$ e $p_X(a), p_Y(b)$.

$Y\backslash X$	0	1	2	3	p_Y
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{15}{220}$	$\frac{1}{220}$	$\frac{56}{220}$
1	$\frac{40}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	$\frac{112}{220}$
2	$\frac{30}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	0	$\frac{48}{220}$
3	$\frac{4}{220}$	0	0	0	$\frac{4}{220}$
p_X	$\frac{84}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$	

$$p(0,0) = \quad P(X=0,Y=0) = \frac{C_{3,0}C_{4,0}C_{5,3}}{C_{12,3}} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{10}{220}$$

$$p(0,1) = \quad P(X=0,Y=1) = \frac{C_{3,0}C_{4,1}C_{5,2}}{C_{12,3}} = \frac{4\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{40}{220}$$

$$\vdots$$

$$p(1,2) = \quad P(X=1,Y=2) = \frac{C_{3,1}C_{4,2}C_{5,0}}{C_{12,3}} = \frac{40}{220}$$

3.3.3 Funzione di distribuzione di probabilità congiunta

$$F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$$
$$F(a,b) = P(X \leq a \cap Y \leq b) = P(X \leq a, Y \leq b) \forall a,b \in \mathbb{R}$$

3.3.4 Funzioni di ripartizione di probabilità marginali

$$F_X(a) = P(X \leq a) = P(X \leq a, Y \leq +\infty) = F(a,+\infty)$$
$$F_Y(b) = P(Y \leq b) = P(X \leq +\infty, Y \leq b) = F(+\infty, b)$$

3.4 Coppie di variabili casuali congiuntamente continue

Dato un esperimento a cui sono associate le variabili casuali X e Y, si dice che esse sono congiuntamente continue se è possibile per esse definire una funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Tale che $\forall D \in \mathbb{R}^2$:

$$P((X,Y) \in D) = \int_D \int f(x,y)dxdy$$

f è detta funzione di densità di probabilità congiunta

3.4.1 Funzioni di densità di probabilità marginali

$$f_X(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a,y)dy$$
$$f_Y(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,b)dx$$

3.4.2 Funzione di distribuzione di probabilità congiunta

$$F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$$
$$F(a,b) = P(X \leq a \cap Y \leq b)$$

Se (X,Y) sono variabili casuali continue:

$$F(a,b) = \int_{-\infty}^{a} (\int_{-\infty}^{b} f(x,y)dy)dx \implies f(a,b) = \frac{\theta^2 F(a,b)}{\theta a \theta b}$$

3.4.3 Funzioni di distribuzione di probabilità marginali

$$F_X(a) = P(X \leq a) = P(X \leq a, Y \leq +\infty) = F(a, +\infty) = \int_{-\infty}^{a}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy)dx$$
$$F_Y(b) = P(Y \leq b) = P(X \leq +\infty, Y \leq b) = F(+\infty, b) = \int_{-\infty}^{b}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx)dy$$

3.5 Coppie di variabili casuali indipendenti

Data una coppia di variabil casuali, esse si dicono indipendenti se $\forall A, B \subset \mathbb{R}$:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una coppia di variabili casuali sia indipendente è che:

1. $F(a,b) = F_X(a)F_Y(b)\forall a, b \in \mathbb{R}$
   oppure
2. se (X, Y) sono una coppia di variabili casuali discrete: $p(a,b) = p_X(a)p_Y(b)\forall a, b \in \mathbb{R}$
3. se (X, Y) sono congiuntamente continue: $f(a,b) = f_X(a)f_Y(b)\forall a, b \in \mathbb{R}$

3.6 Valore medio di una variabile casuale

Data una variabile casuale X, si definisce valore atteso o valore medio di X, se esiste, il numero:

$$E[X] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) & \text{se } X \in \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ (è una variabile casuale discreta)} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx & \text{se } X \text{ è una variabile casuale continua} \end{cases}$$

3.6.1 Proprietà

- Data una variabile casuale X, sia $Y = h(X)$ una variabile casuale funzione della prima, allora:

$$E[Y] = E[h(X)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} h(x_i)p(x_i) & \text{con } X \in \{x_1, \ldots, x_n\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)dx & \text{se } X \text{ è una variabile casuale continua} \end{cases}$$

- Data una variabile casuale X e due numeri reali α e β:

$$E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta$$

- Date due variabil casuali X e Y e definita una variabile casuale $Z = g(X, Y)$, allora:

$$E[Z] = E[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(x_i, y_j)p(x_i, y_j) & \text{con } X \in \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ e } Y \in \{y_1, \ldots, y_m\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy & \text{se } (X,Y) \text{ è una coppia di variabili casuali continue} \end{cases}$$

- Date le variabili casuali X e Y, sia $Z = X + Y$, allora:

$$E[Z] = E[X+Y] = E[X] + E[Y] \implies E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

3.7 Momento n-esimo di una variabile casuale

Data una variabile casuale, si definisce (se esiste) il suo momento n-esimo come:

$$E[X^n] \quad n \in \mathbb{N}$$

3.8 Varianza di una variabile casuale

Data una variabile casuale X di valore medio $E[X] = \mu$, si definisce varianza di X (se esiste):

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$

Se X è una variabile casuale discreta $Var(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 p(x_i)$

Se X è una variabile casuale continua $Var(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$

3.8.1 Proprietà

- $Var(X) \geq 0$
- $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$
- $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$ se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  - se $\alpha = 0$, $Var(\beta) = 0$
  - se $\beta = 0$ o $\beta \neq 0$, $Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$
- Date due variabili casuali X e Y:

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

- Date due variabili casuali X e Y:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$$

3.9 Covarianza di coppie di variabili casuali

Date due variabili casuali X e Y, di valore medio $E[X] = \mu_X, E[Y] = \mu_Y$, si definisce covarianza di (X, Y) (se esiste):

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

La covarianza può assumere i seguenti valori, con il rispettivo significato:

$Cov(X, Y) < 0$ al crescere (o decrescere) dei valori di una variabile casuale, decrescono (o crescono) quelli dell'altra

$Cov(X, Y) = 0$ le variabili casuali sono scorrelate

$Cov(X, Y) > 0$ al crescere (o decrescere) dei valori di una variabile casuale, crescono (o decrescono) quelli dell'altra

3.9.1 Proprietà

- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(X, X) = E[(X - \mu_X)^2] = Var(X)$
- $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$
- Date due variabili casuali indipendenti X e Y: $Cov(X, Y) = 0$
- $Cov(\alpha X, Y) = Cov(X, \alpha Y) = \alpha Cov(X, Y)$
- $Cov(\sum_{i=1}^{N} X_i, \sum_{j=1}^{M} Y_j) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} Cov(X_i, Y_i)$
- $Var(\sum_{i=1}^{N} X_i) = \sum_{i=1}^{N} Var(X_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1 \text{ con } i \neq j}^{N} Cov(X_i, X_j)$

3.10 Coefficiente di correlazione di coppie di variabili casuali

Date due variabili casuali X e Y di valore atteso $E[X]$ e $E[Y]$, allora si dice coefficiente di correlazione di X e Y:

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \in [-1, 1]$$

4 Legge dei grandi numeri

4.1 Introduzione

Sia X la variabile casuale che rappresenta l'esito di un esperimento. $E[X]$ sarà la grandezza fisica da misurare, $Var(X)$ è proporzionale all'errore di misura al quadrato, perciò $\sqrt{Var(X)}$ è proporzionale all'errore di misura. Se l'esperimento viene ripetuto N volte, si introducono $X_1, \dots, X_N$ per rappresentare gli esiti di ciascun esperimento. $X_1, \dots, X_N$ sono variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite (v.c.i.i.d.), nel caso in cui l'esperimento venga ripetuto in maniera indipendente e identica.
$\bar{X} = \frac{\sum_{k=1}^{N} X_k}{N}$ è la media aritmetica, o media campionaria in inferenza statistica. $\bar{X}$ è una variabile casuale, funzione di $X_1, \dots, X_N$. Se $X_1, \dots, X_N$ sono identicamente distribuite, $\mu = E[X_1] = \dots = E[X_N]$ e $\sigma^2 = Var(X_1) = \dots = Var(X_N)$.

$$E[X] = E[\tfrac{\sum_{k=1}^{N} X_k}{N}] = \tfrac{1}{N}E[\sum_{k=1}^{N} X_k] = \tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E[X_k] = \tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mu = \tfrac{N\mu}{N} \quad = \mu$$
$$Var(X) = Var(\tfrac{\sum_{k=1}^{N} X_k}{N}) = \tfrac{1}{N^2}Var(\sum_{k=1}^{N} X_k) = \tfrac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} Var(X_k) = \tfrac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} \sigma^2 = \tfrac{N\sigma^2}{N^2} \quad = \tfrac{\sigma^2}{N}$$

Se N tende ad infinito, il valore medio rimane invariato, mentre l'errore tende a 0. Questo è il concetto dietro la legge dei grandi numeri.

4.2 Disuguaglianza di Markov

Sia X una variabile casuale con valori $\mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$, con $E[X] = \mu$ e sia $a \in \mathbb{R}^+$.

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

Questa disuguaglianza è sempre vera nella teoria, ma nella pratica risulta utile soltanto se $a > E[X]$.

4.3 Disuguaglianza di Cebycev

Data una variabile casuale X con $E[X] = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$ e considerata $r \in \mathbb{R}^+$.

$$P(|X - \mu| \geq r) \leq \frac{\sigma^2}{r^2}$$

Questa disuguaglianza viene impiegata come stima della probabilità soltanto se $\frac{\sigma^2}{r^2} < 1$.

4.4 Legge dei grandi numeri (formulazione debole)

Sia data una successione di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite (v.c.i.i.d.) $X_1, \dots, X_N$ con $E[X_k] = \mu$, $Var(X_k) = \sigma^2$ e $k = 1, \dots, N$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere:

$$\lim_{N \to +\infty} P(|\frac{\sum_{k=1}^{N} X_k}{N} - \mu| > \varepsilon) = 0$$

Ovvero, la media aritmetica delle X_k converge in probabilità alla media teoria μ.

4.5 Funzione generatrice dei momenti

Data una variabile casuale X, si dice funzione generatrice dei momenti (se esiste):

$$\phi(t) = E[e^{tx}]$$

con $t \in \mathbb{R}$, si può notare che:

$$\phi(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} e^{tx_k} p(x_k) \text{ per } X \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx \text{ per } X \text{ variabile casuale continua} \end{cases}$$

4.5.1 Proprietà

- $\phi(0) = E[e^{0x}] = E[1] = 1$
- $\frac{d\phi}{dt}|_{t=0} = \frac{dE[e^{tx}]}{dt}|_{t=0} = E[\frac{de^{tx}}{dt}]|_{t=0} = E[xe^{tx}]|_{t=0} = E[x]$
- $\frac{d^n\phi}{dt^n}|_{t=0} = E[x^n]$
- Siano X e Y due variabili casuali indipendenti, allora: $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$
- Se due variabili casuali presentano la stessa funzione generatrice dei momenti, allora sono identicamente distribuite.

5 Modelli di variabili casuali discrete

5.1 Variabile casuale di Bernoulli

$X \sim Be(p)$ con $p \in [0,1]$, se:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se } E \text{ si verifica} \\ 0 & \text{se } E \text{ non si verifica} \end{cases}$$

- $p(1) = p = p(E)$
- $p(0) = 1 - p = p(E^c) = q$

5.1.1 Varianza

- $E[X] = 0 * q + 1 * p = p$
- $E[X^n] = 0^n * q + 1^n * p = p$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = pq$$

5.1.2 Funzione generatrice dei momenti

$$\phi(t) = E[e^{tx}] = e^{t*0} * q + e^{t*1} * p = q + e^t p$$

5.2 Variabile casuale binomiale

$X \sim B(n,p)$ con $p \in [0,1], n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$
Si consideri un esperimento in cui l'evento A si verifica con probabilità p. Si ripete tale esperimento in modo indipendente e identico n volte. X rappresenta il numero di prove in cui si è verificato A.

5.2.1 Funzione di massa

$$P(X = k) = p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

per $q = 1 - p, X \in \{0, 1, \dots, n\}, k = 0, 1, \dots, n$.

5.2.2 Varianza

$X = \sum_{j=1}^n Y_j$ con $Y_j \sim Be(p)$ e Y_j indipendente e identicamente distribuita:

- $E[X] = E[\sum_{j=1}^n Y_j] = \sum_{j=1}^n E[Y_j] = \sum_{j=1}^n p = np$

$$Var(X) = Var(\sum_{j=1}^n Y_j) = \sum_{j=1}^n Var(Y_j) = \sum_{j=1}^n pq = npq$$

5.2.3 Funzione generatrice dei momenti

$$\phi_X(t) = \phi_{\sum_{j=1}^n Y_j}(t) = \phi_{Y_1}(t) * \dots * \phi_{Y_n}(t) = (q + e^t p)^n$$

5.2.4 Proprietà di riproducibilità

Siano $X \sim B(n_1, p)$ e $Y \sim B(n_2, p)$, indipendenti tra loro, allora:

$$Z = X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$$

5.3 Variabile casuale di Poisson (o poissoniana)

$X \sim Po(\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$. X è una variabile casuale discreta con $X \in \mathbb{N}$.

5.3.1 Funzione di massa

$$p(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \text{ se } k \in \mathbb{N}$$

5.3.2 Funzione di distribuzione di probabilità

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k}$$

La funzione di distribuzione di probabilità della variabile casuale poissoniana è detta legge degli eventi rari.

5.3.3 Varianza

- $E[X] = \frac{d\phi}{dt}|_{t=0} = (\frac{de^{\lambda(e^t-1)}}{dt})|_{t=0} = [e^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t]|_{t=0} = \lambda$
- $E[X^2] = \frac{d^2\phi}{dt^2}|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

5.3.4 Funzione generatrice dei momenti

$$\phi(t) = E[e^{tx}] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

5.3.5 Proprietà di riproducibilità

Siano $X \sim Po(\lambda_1)$ e $Y \sim Po(\lambda_2)$, indipendenti tra loro, allora:

$$Z = X + Y \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Le variabili casuali poissoniane possono essere viste come il limite di una variabile casuale binomiale quando n tende a $+\infty$.

$$n \to +\infty, np = \lambda \implies p = \frac{\lambda}{n} << 1$$

5.4 Variabile casuale geometrica

$X \sim G(p)$ con $P(A) = p \in [0, 1]$
Si ripete un esperimento in maniera identica e indipendente fino ad osservare l'evento A.

$$X = \text{ 'n° di prove per ottenere } A\text{'}$$
$$X \in \{1, \dots, +\infty\} \implies X \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

5.4.1 Funzione di massa

$$p(X = k) = p(k) = (1-p)^{k-1}p \text{ con } k = 0, 1, \dots, +\infty$$

5.4.2 Varianza

- $E[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1} = \frac{1}{p}$
- $E[X^2] = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2pq^{k-1} = \frac{2-p}{p^2}$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

5.5 Variabile casuale binomiale negativa

$X \sim NB(r, p)$ con $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$
Si ripete un esperimento in maniera identica e indipendente fino ad ottenere r volte l'evento A. Con $P(A) = p$ si indica la probabilità del verificarsi dell'evento A nel singolo esperimento.

$$X = \text{ 'n° di tentativi per osservare } r \text{ volte l'evento } A\text{'} X \in \{r, r+1, r+2, \dots, +\infty\}$$

5.5.1 Funzione di massa

$$P(X = k) = p(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$$

5.5.2 Varianza

Dato $X = \sum_{j=1}^{r} Y_j$ con $Y_j \sim G(p)$ indipendenti

- $E[X] = E[\sum_{j=1}^{r} Y_j] = \sum_{j=1}^{r} E[Y_j] = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{p} = \frac{r}{p}$

$$Var(X) = Var(\sum_{j=1}^{r} Y_j) = \sum_{j=1}^{r} Var(Y_j) = \frac{rq}{p^2}$$

6 Modelli di variabili casuali continue

6.1 Variabile casuale uniforme

$X \sim U(\alpha, \beta)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \text{se } x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

6.1.1 Varianza

- $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\beta-\alpha} dx = \frac{\beta+\alpha}{2}$
- $E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\beta-\alpha} dx = \frac{\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta}{3}$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{\beta^2 + \alpha^2 + \alpha\beta}{3} - \frac{(\beta+\alpha)^2}{4} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

6.1.2 Funzione di distribuzione di probabilità

Se $a \in \mathbb{R}$

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(a) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } a < \alpha \\ \frac{a-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{se } \alpha \leq a \leq \beta \\ 1 & \text{se } a > \beta \end{cases}$$

6.2 Variabile casuale gaussiana (o normale)

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ oppure $X \sim N(\mu, \sigma)$ con:

- $\mu \in \mathbb{R}$
- $\sigma \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Il massimo di $f(x)$ si ha in $x = \mu$

$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

La variabile casuale normale standard è data da: $\mu = 0, \sigma = 1$.

6.2.1 Funzione di distribuzione di probabilità

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x) dx = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

6.2.2 Funzione generatrice dei momenti

Sapendo che: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$.

$$\phi(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx \implies \phi(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

6.2.3 Varianza

- $E[X] = \mu$
- $E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2$

$$Var(X) = \sigma^2$$

6.2.4 Proprietà di riproducibilità

Dati $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ indipendenti e $T = X + Y$:

$$\phi_T(t) = e^{t\mu_1 + \frac{t^2\sigma_1^2}{2}} e^{t\mu_2 + \frac{t^2\sigma_2^2}{2}} \implies T \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

6.2.5 Trasformazione lineare

Dati $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y = \alpha X + \beta$ con $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\phi_Y(t) = E[e^{tY}] = e^{t(\alpha\mu+\beta)+\frac{t^2}{2}\alpha^2\sigma^2} \implies Y \sim N(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$$

Se $\alpha = \frac{1}{\sigma}$ e $\beta = -\frac{\mu}{\sigma}$, allora: $Y \sim N(\frac{1}{\sigma}\mu - \frac{\mu}{\sigma}, \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2) = N(0,1)$. Per qualsiasi variabile casuale gaussiana $X \sim N(\mu, \sigma)$ è sempre possibile introdurre la trasformazione lineare $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

6.2.6 Proprietà della funzione di distribuzione

Data $Z \sim N(0,1)$ e la sua funzione di ripartizione $F_Z(a)$:

- $F_Z(0) = P(Z \leq 0) = \frac{1}{2}$
- $F_Z(a) = \int_{-\infty}^{a} f_Z(x)dx = 1 - F_Z(-a)$

6.2.7 Valore critico della normale standard

Data $Z \sim N(0,1)$:

$$Z_\beta = 1 - F_Z(Z_\beta) = \beta \implies P(Z > Z_\beta) = \beta$$

6.3 Variabile casuali esponenziali

$X \sim E(\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

6.3.1 Funzione di distribuzione di probabilità

$$F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 0 \\ 1 - e^{\lambda a} & \text{se } a \geq 0 \end{cases}$$

6.3.2 Funzione generatrice dei momenti

$$\phi(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx \implies \phi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

6.3.3 Varianza

- $E[X] = \frac{d\phi(t)}{dt}|_{t=0} = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$
- $E[X^2] = \frac{d^2\phi(t)}{dt^2}|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2})|_{t=0} = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$
- $Var(X) = E[X^2]E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

6.3.4 Proprietà

- $\forall c \in \mathbb{R}^+$ e $X \sim E(\lambda)$

$$Y = cX \sim E(\frac{\lambda}{c})$$

- Siano dati n dispositivi $D_1, \dots, D_n$ e si supponga che X_k sia la durata di funzionamento di D_k.

$$X_k \sim E(\lambda_k) \text{ con } \lambda_k \in \mathbb{R}^+$$

Si consideri un sistema che contiene i dispositivi in serie e sia T la variabile casuale che rappresenta la durata di funzionamento del sistema.

$$T \sim E(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)$$

- Dati $t, s \in \mathbb{R}^+$ e $X \sim E(\lambda)$

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$$

6.4 Funzioni di variabili casuali

6.5 Processi stocastici

Un processo stocastico è una famiglia di variabili casuali che dipendono da un parametro. Spesso il parametro ha il significato di un tempo.

$$X(t)$$

6.6 Variabile casuale lognormale

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies Y = e^X \sim logN(\mu, \sigma^2)$. Dato $a \in \mathbb{R}^+$:

$$f_Y(a) = \begin{cases} \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(a)-\mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

6.6.1 Varianza

- $E[Y] = E[e^X] = \phi_X(1) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$
- $E[Y^2] = E[e^{2x}] = \phi_X(2) = e^{2\mu + 2\sigma^2}$
- $Var(Y) = E[Y^2] - E[Y]^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$

6.6.2 Proprietà di riproducibilità

Dati $Y_1 \sim logN(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y_2 \sim logN(\mu_2, \sigma_2^2)$ indipendenti:

$$Z = Y_1 Y_2 = e^{X_1} e^{X_2} = e^{X_1 + X_2} = e^T \sim logN(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

7 Teorema del limite centrale

7.1 Definizione

Data una successione di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite $X_1, \dots, X_n$ con valore medio $E[X_k] = \mu$ e varianza $Var(X_k) = \sigma^2$, per $k = 1, \dots, n$ e definita la variabile casuale:

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Converge in distribuzione ad una variabile casuale normale standard, ovvero $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq a) = F_Z(a) \text{ con } Z\dot{\sim}N(0,1)$$

Dato $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ e $Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$:

- $E[Y_n] = E[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}] = \frac{E[S_n]-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{n\mu - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = 0$
- $Var(Y_n) = \frac{1}{\sigma^2 n} Var(S_n) = \frac{n\sigma^2}{\sigma^2 n} = 1$

7.2 Applicazioni del teorema del limite centrale

7.2.1 Prima applicazione

Se $X \sim B(n,p)$ con $n >> 1$

$$X = \sum_{k=1}^{n} T_k \qquad \text{con } T_k \sim Be(p) \text{ indipendenti}$$
$$\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\dot{\sim}N(0,1) \quad \text{questo risultato è vero per } n \geq 30$$

Per migliorare la approssimazione per n "non così grande", si introduce la seguente tecnica. Se $X \sim B(n,p)$ e $P(X=k) = p(k) \neq 0$

$$X\dot{\sim}N(np, npq)$$
$$P(X=k) = \int_k^k \frac{1}{\sqrt{npq2\pi}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}} dx = 0$$

Perciò:

$$P(X=k) = P(k - \tfrac{1}{2} < X \leq k + \tfrac{1}{2}) = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{npq2\pi}} e^{-\frac{(x-np)^2}{2npq}} dx \neq 0$$
$$P(k - \tfrac{1}{2} < X \leq k + \tfrac{1}{2}) = F_X(k+\tfrac{1}{2}) - F_X(k - \tfrac{1}{2})$$

Se bisogna calcolare $P(X<k) = \sum_{i=0}^{k-1} p(i) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$:

$$X\dot{\sim}N(np, npq)$$
$$P(X<k) = P(X \leq k) \implies P(X < k - \tfrac{1}{2}) \neq P(X \leq k)$$

$P(X<k)$ viene calcolata per $P(X < k - \frac{1}{2})$:

- $P(X<k) = P(X < k - \frac{1}{2})$
- $P(X \leq k) = P(X < k + \frac{1}{2})$
- $P(X > k) = P(X > k + \frac{1}{2})$
- $P(X \geq k) = P(X > k - \frac{1}{2})$

Questa serie di uguaglianze si chiama metodo dell'approssimazione alla continuità.

7.2.2 Seconda applicazione

Se, in generale, $X_1, \ldots, X_n$ sono variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_j \dot{\sim}N(n\mu, n\sigma^2)$$

- $E[X_k] = \mu$
- $Var(X_k) = \sigma^2$
- con $k = 1, \ldots, n$

7.2.3 Terza applicazione

Se, in generale, $X_1, \ldots, X_n$ sono variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite, con $E[X_k] = \mu$ e $Var(X_k) = \sigma^2$:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}$$
$$Y_n = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\dot{\sim}N(0,1)$$