

Appunti di Analisi T1

Dal corso di Ingegneria Informatica dell'Università di Bologna. Per consigli o correzioni, contattatemi. Info su leoflo.me.

1. Principi

1.1. Principio di induzione

Il principio di induzione è un metodo generico per dimostrare un teorema qualsiasi con dominio in $\mathbb{N}$. Il procedimento di prova per induzione prevede un'affermazione o uguaglianza che dipende da n e viene indicata con: $P(n)$.

Data l'affermazione $P(n)$, il principio prova la precedente, al verificarsi delle seguenti condizioni:

- $P(0)$
- $P(k)$

Se queste condizioni si verificano, allora: $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.2. Principio del minimo

Ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ha un minimo.

1.3. Principio del valore intermedio

Data una funzione continua $f(x)$ e due punti $f(a)$ e $f(b)$, allora:

$$\exists c \in]a, b[: f(c) = \lambda$$

1.4. Piccole nozioni

- L'insieme dei numeri reali non è numerabile
- Radice aritmetica: $\sqrt[n]{m} = m^{1/n} : m \in \mathbb{N}$
- Seno iperbolico: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- Coseno iperbolico: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Tangente iperbolica: $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

1.5. Maggioranti e minoranti

Dato $\mathbb{A} = \{a \in \mathbb{R}\}$:

- Maggiorante: $M \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{A} : a \leq M$
- Minorante: $m \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{A} : a \geq m$

Se l'insieme $\mathbb{A}$ ammette un maggiorante si dice superiormente limitato, se ammette un minorante si dice inferiormente limitato e se ammette entrambe si dice limitato.

- Il massimo di un insieme $\mathbb{A}$, se esiste, è il più piccolo dei maggioranti
- Il minimo di un insieme $\mathbb{A}$, se esiste, è il più grande dei minoranti

1.6. Numeri complessi

$$x^2 + 1 = 0, \text{impossibile in } \mathbb{R}$$

Si risolve introducendo i : $x^2 = -1 \rightarrow x = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$. Un numero complesso è composto da due parti:

- parte reale: $a \in \mathbb{R}$
- parte complessa: $i * b : b \in \mathbb{R}$

1.7. Notazione dei numeri complessi

$$z = a + ib$$

1.8. Teorema fondamentale dell'algebra

- **Tesi** $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$
- **Ipotesi** Il polinomio $p(x)$ ha n radici in $\mathbb{C}$ tenendo in conto la moltiplicabilità: $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$.

2. Serie

2.1. Successione

Una successione di numeri reali è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

I termini della successione sono notati nella seguente maniera:

- $f(0) = a_0$
- $f(1) = a_1$
- $f(2) = a_2$

La successione può essere:

- superiormente limitata
- inferiormente limitata
- limitata

2.2. Serie

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali. Definiamo la successione $(s_n)_n$ associata:

- $s_0 = a_0$
- $s_1 = a_0 + a_1$
- $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$
- ...

La successione delle somme parziali si chiama serie e si indica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ oppure } \sum a_n$$

I numeri a_n si dicono termini della serie. Una serie può essere:

- Convergente $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = A \in \mathbb{R}$
- Divergente $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases}$
- Indeterminata $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$

Data una serie $\sum a_n$, se cambio un numero finito di termini, la serie generata manterrà il carattere dell'originale.

2.2.1. Serie geometrica

Dato $q \in \mathbb{R}$, allora:

$$R_n := q^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

La serie geometrica converge soltanto se $|q| < 1$.

$$\sum_n q^n = \frac{1}{1-q}$$

2.2.2. Convergenza di una serie

Una serie converge se e soltanto se $a_n \rightarrow 0$. La condizione precedente è necessaria ma non sufficiente per affermare la convergenza di una serie.

2.2.3. Criterio di condensazione

Dati $(a_n)_n, (b_n)_n$

$$\forall n : 0 \leq a_n \leq b_n$$

- se b_n converge, anche a_n converge.
- se a_n diverge, anche b_n diverge.

2.2.4. Criterio di condensazione

$\sum_n a_n$ converge se e soltanto se converge:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$$

2.2.5. Criterio del valore assoluto

Data una serie $\sum_n a_n$, se la serie $\sum_n |a_n|$ converge, anche la prima converge.

$$\left| \sum_n a_n \right| = \sum_n |a_n|$$

Una serie che viene dichiarata convergente usando questo criterio è detta assolutamente convergente.

2.2.6. Criterio della radice

Dato $(a_n)_n$, se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, allora:

- se $L < 1$ allora $\sum a_n$ converge
- se $L > 1$ allora $\sum a_n$ non converge
- se $L = 1$ allora non si può concludere nulla

2.2.7. Criterio del rapporto

Dato $(a_n)_n, a_n \neq 0$, se $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n + \frac{1}{a_n} \right| = L$, allora:

- se $L < 1$ allora $\sum a_n$ converge
- se $L > 1$ allora $\sum a_n$ non converge
- se $L = 1$ allora non si può concludere nulla

2.2.8. Criterio di Leibniz

Se $(a_j)_j : a_j > 0 : a_j \geq a_{j+1} : \lim_{j \rightarrow +\infty} a_j = 0$, allora la serie:

$$\sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j * a_j$$

converge.

2.2.9. Criterio del confronto asintotico

Dati $(a_n)_n, \forall n : a_n \geq 0$ e $(b_n)_n, \forall n : b_n > 0$, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$, allora:

- $\sum a_n < +\infty \Rightarrow \sum b_n < +\infty$, entrambe convergono
- $\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$, entrambe divergono

Dati $(a_n)_n, \forall n : a_n \geq 0$ e $p = n * a_n$, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}} = L > 0$, allora $\sum_n a_n$ converge se $\sum_n \frac{1}{n^p}$ converge; possibile converge se $p > 1$.

3. Limiti

3.1. Definizione con le serie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L$$

3.2. Definizione con gli intorni

La funzione $f(x)$ si avvicina arbitrariamente ad L , a patto che x sia abbastanza vicino a x_0 .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall n > \delta : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\} \rightarrow f(x) \in]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$$

- ε = intorno al limite della funzione per quel valore
- δ = intorno al valore della funzione
- L = il valore del limite

Nel caso il limite $\in [-\infty, +\infty]$ allora usiamo la notazione $M > 0$ oppure $M < 0$ per indicare l'intorno.

3.3. Gerarchia degli infiniti

Seguono alcune funzioni in ordine crescente di chi permette a n di tendere ad infinito più velocemente.

- $\ln(n)$
- $n^a : (a > 0)$
- $A^n : (a > 1)$
- $n!$
- n^n

3.4. Algebra dei limiti

Dati i limiti $L, M, x_0 \in [-\infty, +\infty]$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ allora:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L + M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = L - M$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) * g(x)) = L * M$

3.5. Limiti notevoli

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - \frac{1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

4. Funzioni

4.1. Approssimazione lineare

Un'errore si indica con un "o piccolo".

$o(1) \rightarrow$ è una funzione che tende a 0 per $h \rightarrow 0$

La notazione "o piccolo" indica un comportamento piuttosto che un valore arbitrario.

Dato $n \in \mathbb{N}$:

$$g(h) = o(h^n) \text{ per } h \rightarrow 0 \rightarrow \frac{g(h)}{h^n} \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0 \rightarrow \frac{g(h)}{h^n} = o(1) \text{ per } h \rightarrow 0$$

4.2. Punti critici

- Data una funzione derivabile $f(x)$, x_0 è un punto critico di essa se $Df(x_0) = 0$.
- Data una funzione derivabile $f(x)$, i punti di massimo e minimo locale sono punti critici.

4.3. Teorema di Rolle

Dati $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua su $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, $f(a) = f(b)$:

$$\exists c \in]a, b[: Df(c) = 0$$

4.4. Teorema di Weierstrass

Dati $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua su $[a, b]$:

$\exists$ un massimo ed un minimo di f

4.5. Teorema di Lagrange

Dati $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua su $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$:

$$\exists c \in]a, b[: Df(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

4.6. Teorema De l'Hopital

Dati $f, g : [-\infty, +\infty]$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = L \in [-\infty, +\infty]$$

4.7. Teorema di Cauchy

Dati $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua su $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$:

$$\exists c \in]a, b[: (f(b) - f(a))Dg(c) = (g(b) - g(a))Df(c) \rightarrow \frac{Df(c)}{Dg(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

5. Derivate

5.1. Rapporto incrementale

Data una funzione $f(x)$, un intervallo h , allora il rapporto incrementale è il rapporto tra $f(x+h) - f(x)$ e h .

$$\Delta f = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

5.2. Derivata

La funzione $f(x)$ è derivabile, se esiste un limite finito al rapporto incrementale di essa.

$$\exists \text{ finito } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

5.2.1. Notazioni

- Df
- $\frac{df}{dx}$
- f'
- $f^{(1)}$
- $\dot{f}$

Se $f(x)$ è derivabile $\rightarrow f(x)$ è continua.

5.3. Derivate di grado superiore

Data una funzione $f(x) \rightarrow Df(x)$:

$$Df(x) \rightarrow D(Df(x)) = D^2f(x)$$

5.3.1. Notazioni per derivate di grado superiore

- $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} * \frac{df}{dx}$
- f''
- $f^{(2)}$
- $\ddot{f}$

$$D^n f = \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}$$

- $D^2f \geq 0 \rightarrow Df$ è crescente, la funzione è convessa.
- $D^2f \leq 0 \rightarrow Df$ è decrescente, la funzione è concava.

5.4. Derivate comuni

- $Dc = 0$
- $Dcx = c$
- $D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$
- $Dx^n = nx^{n-1}$
- $D\sin(x) = \cos(x)$
- $D\cos(x) = -\sin(x)$
- $D\tan(x) = \frac{1}{\cos^2}(x) = 1 + \tan^2(x)$
- $De^x = e^x$
- $D\ln(x) = \frac{1}{x}$
- $D\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $D\sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$
- $D\cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$
- $D\tanh(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2}(x) = 1 - \tanh^2(x)$

5.5. Regole di calcolo

- $f(x), g(x) \rightarrow D(f + g) = Df + Dg$
- $f(x), c \rightarrow D(cf) = c * Df$
- $f(x) = \sum_n^{k=0} a_k x^k \rightarrow D(f) = \sum_n^{k=1} a_k k x^{k-1}$
- $f(x), g(x) \rightarrow D(f * g) = (Df)g + f(Dg)$
- $f(x), g(x) \rightarrow D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(Df)g - f(Dg)}{g^2}$
- $f(x), g(x) \rightarrow D(fog) = Df(g) * Dg$
- $f(x) \rightarrow Df^{-1} = \frac{1}{Df(f^{-1}(x))}$

6. Taylor

6.1. Formula di Taylor

Data una funzione $f(x)$ si vuole approssimare con un polinomio. Se $f(x)$ è derivabile n -volte, il polinomio può essere preso di grado n . La formula di Taylor prevede che, una volta fissato x_0 :

$$f(x) - p(x) = o((x - x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

$o((x - x_0)^n)$ è detto “resto di Peano”.

6.2. Polinomio di Taylor

Dati $f(x)$ derivabile n volte, $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \frac{D^2 f(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{D^n f(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

6.3. Polinomi di funzioni comuni

Alcuni polinomi di Taylor di funzioni comuni rappresentati fino al 4° grado:

- $\sin(x) \rightarrow x - \frac{1}{6}x^3$
- $\cos(x) \rightarrow 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$
- $e^x \rightarrow 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$
- $\ln(1 + x) \rightarrow x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$
- $(1 + x)^\alpha \rightarrow 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{24}x^4$

6.4. Resto secondo Lagrange

Oltre al “resto di Peano” esistono altri tipi di resto. Uno di questi è il “resto di Lagrange”.

Dato $c \in [x, x_0]$:

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \frac{D^2 f(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{D^n f(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{D^{n+1} f(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \text{ per } x \rightarrow x_0$$

7. Integrali

7.1. Definizione

Data una funzione $f(x)$, troviamo una funzione $F(x)$ tale che $DF(x) = f(x)$.

Dato $c \in \mathbb{R}$:

$$DF = D(F + c) \rightarrow f = f + 0$$

7.2. Notazioni

- $\int f$
- $\int f(x)dx$
- $\int f dx$

7.3. Integrali comuni

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c : \alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c : \alpha = -1$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$
- $f(x), g(x); \alpha, \beta \in \mathbb{R} \rightarrow \int (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx$

7.4. Integrazione per parti

Dati $F(x), G(x)$:

$$\int (DF) * G dx = FG - \int F * (DG) dx$$

7.5. Cambiamento di variabile

Dati $F(x), G(x)$:

$$\int DF(G(x)) * DG(x) dx = DF(G(x)) + c$$

7.6. Sostituzioni con tangente

Dato $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$:

- $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$
- $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Dato $t = \tan(x)$:

- $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$
- $\sin(x) = \dots$
- $\cos(x) = \dots$

8. Equazioni differenziali

8.1. A variabili separabili

Data una equazione:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x)g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Possiamo ricavare la funzione $x(t)$ con la seguente formula:

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{f(s)} ds = \int_{t_0}^t g(s) ds$$

8.2. Equazione lineare

Data una equazione:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Se $b \equiv 0$ allora possiamo risolverla con la formula:

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} x_0$$

Altrimenti la formula completa è:

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^y a(s) ds} b(y) dy \right)$$

8.3. Equazione di II ordine a coefficienti costanti

Data una equazione:

$$\begin{cases} \ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Bisogna trovare il rispettivo polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

Trovare λ_1, λ_2 e:

- se $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
- se $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) = e^{\lambda_1 t} (C_1 + C_2 t)$
- se $\lambda_{1,2} = \lambda \pm i\mu, \mu > 0 \rightarrow x(t) = e^{\lambda t} (C_1 \cos(\mu t) + C_2 \sin(\mu t))$