

Appunti di Elettrotecnica

Dal corso di Ingegneria Informatica dell'Università di Bologna. Per consigli o correzioni, contattatemi. Info su leoflo.me.

1. Elettromagnetismo

Le proprietà fondamentali della materia sono **massa** e **carica**. La massa è la causa fondamentale dei fenomeni di tipo meccanico e fluidodinamico. La carica e il suo moto sono la causa fondamentale dei fenomeni elettromagnetici.

1.1. Legge di Coulomb

Qualora due cariche q_0, q_1 dovessero trovarsi nel vuoto ad una distanza finita tra loro, la legge di Coulomb definisce la **forza elettrostatica** interagente tra loro.

$$|F_C| \propto \frac{q_0 q_1}{r^2}$$

dove r è la distanza tra q_0 e q_1 .

La forza di Coulomb è diretta nella direzione di r . Quando q_0 e q_1 hanno lo stesso segno, la forza è repulsiva, mentre è attrattiva nel caso di segni opposti.

L'unità di misura della forza di Coulomb è il Newton [N]. Il coefficiente di proporzionalità è $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ dove ϵ_0 è la **costante dielettrica del vuoto** [$\epsilon_0 = 8,854 * 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$]

1.2. La carica

L'unità di misura SI della carica elettrica è il Coulomb [C]. La carica fondamentale nel SI è:

$$e = 1,6021 * 10^{-19} C$$

Un Coulomb equivale a:

$$\frac{1}{e} = 6,241 * 10^{18} \text{ cariche elementari}$$

Protone ed elettrone hanno come valore assoluto di carica e . Per convenzione, la carica del protone è positiva ($+e$) mentre quella dell'elettrone è negativa ($-e$). In natura esistono **soltanto** cariche multiple di e . Non può esistere una carica sottomultiplo di e .

1.2.1. Il moto delle cariche

La forza che agisce su una particella carica è:

$$F = q(E + u * B)$$

dove:

- F è la forza [N]
- q è la carica elettrica [C]
- E è il campo elettrico
- u è la velocità della carica [$\frac{m}{s}$]
- B è il vettore di induzione magnetica

Se $B = 0$, allora $F = qE$, che rappresenta la **forza elettrostatica**. Il campo elettrico $E = \frac{F}{q}$ è una forza per unità di carica ($[\frac{N}{C}]$). Un campo elettrico e la forza elettrostatica da cui esso deriva hanno la stessa direzione. Perciò il campo produce un'accelerazione della carica lungo la propria direzione. Nel SI, l'unità di misura di E è $\frac{N}{C} = \frac{V}{m} = m \text{ kg s}^{-2} C^{-1}$.

Se $E = 0$, allora $F = q(u * B)$, che rappresenta la **forza di Lorentz**. Il vettore di induzione B è una forza per unità di carica e di velocità ($[N \frac{s}{C} m]$). La carica subisce una curvatura nella direzione perpendicolare al piano formato da u e B .

Quindi una particella carica induce una forza sulle cariche che la circondano. Tale forza è la forza di Coulomb F_C (o forza elettrostatica). In ogni punto della regione attorno alla carica vi è un campo elettrico $E(x, y, z)$ definito dalla forza indotta su una carica unitaria, posta nel punto considerato.

Qualora su una carica in moto si induca una forza deviante perpendicolare al moto, tale forza è la forza di Lorentz F_L (o forza magnetica). Il campo di induzione magnetica $B(x, y, z)$ è dato dalla forza indotta su una carica unitaria in moto per unità di velocità della carica stessa. La direzione del campo B è perpendicolare alla velocità ed alla forza F_L (la forza indotta sulla carica).

1.2.2. Densità volumetrica di carica

La carica elettrica non può essere creata o distrutta (legge della conservazione della carica elettrica). Può essere soltanto trasferita. La carica elettrica di un sistema isolato non può variare.

La **densità volumetrica di carica** (o distribuzione della carica) è definita da:

$$\rho_c(x, y, z) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau} = \frac{dq}{d\tau}$$

dove $d\tau$ è l'elemento infinitesimo del volume.

1.3. Densità di corrente

La **densità di corrente** J è il vettore il cui modulo è la quantità di carica che attraversa una superficie unitaria perpendicolare alla velocità u delle cariche. La direzione ed il verso di J sono la direzione ed il verso di u .

$$J * \hat{n} = \lim_{\Delta S} \lim_{\Delta t} \frac{\Delta q}{\Delta S \Delta t}$$

dove J è la densità di corrente con unità di misura $[\frac{C}{m^2 s}] = [\frac{A}{m^2}]$.

$J(x, y, z)$ definisce un campo vettoriale ed è la densità di flusso delle cariche. La corrente elettrica i è il flusso di cariche attraverso una superficie S :

$$i = \iint_S J * \hat{n} dS$$

1.4. Corrente elettrica

La corrente elettrica i che attraversa una superficie è la quantità di carica che attraversa la superficie nell'unità di tempo:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Se si considera un cavo conduttore, la corrente di carica è la quantità di carica che attraversa una sezione del cavo nell'unità di tempo. L'unità di misura SI è l'Ampere [A] dove $A = \frac{C}{s}$ (A è una unità di misura base del SI).

La corrente elettrica istantanea è:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

1.5. Tensione elettrica e differenza di potenziale

La tensione elettrica e_{12} è il lavoro $L_{q=1}^{1 \rightarrow 2, l}$ che il campo elettrico $E(x, y, z)$ compie per spostare una carica unitaria dal punto 1 al 2 lungo il percorso l .

$$e_{12} = \int_{1, l}^2 E * dl$$

Per spostare una carica q dal punto 1 al 2, il lavoro è: $L_{q=1}^{1 \rightarrow 2, l} = qe_{12}$. e_{12} dipende da valori che assume il campo E lungo la linea l (per il calcolo di e_{12} è necessario conoscere il valore di E in ogni punto di l). L'unità di misura SI di e_{12} è il Volt [V] dove $V = \frac{J}{C} = m^2 \text{ kg s}^{-2} C^{-1}$.

Qualora il campo elettrico E sia un vettore conservativo, è possibile esprimerlo come il gradiente di un potenziale elettrico $v(x, y, z)$:

$$e_{12} = \int_{1, l}^2 E * dl = - \int_{1, l}^2 dv = v_1 - v_2 = v_{12}$$

dove $v(x, y, z)$ è la funzione di potenziale elettrico mentre v_{12} è la differenza di potenziale elettrico.

Poichè v_{12} è la differenza dei valori che la funzione $v(x, y, z)$ assume nel punto iniziale e finale della linea l , v_{12} non dipende dal percorso che unisce i due punti. In questo caso E è un vettore conservativo con $E = -\nabla v(x, y, z)$. Per un percorso chiuso l_c contenuto nella regione dove E è conservativo si ha:

$$e_l = \oint_{l_c} E * dl_c = - \oint_{l_c} \nabla v * dl_c = 0$$

1.6. Leggi dell'elettromagnetismo

1.6.1. Prima legge di Maxwell

La grandezza vettoriale **campo magnetico** H è definito dalla prima legge di Maxwell (legge di Ampere):

$$\oint_{l_c} H * dl_c = i_t$$

Anche in questo caso, la corrente totale i_t è il flusso di carica del vettore J_t ovunque solenoidale ($J_t = J + \frac{\theta D}{\theta t}$). Perciò i_t è il flusso concatenato con la linea l_c contorno della superficie che attraversa. Il verso di percorrenza di l è determinato con la regola della vite destrorsa.

L'unità di misura SI di H è l'Ampere su metro $\left[\frac{A}{m}\right]$.

1.6.2. Seconda legge di Maxwell

La legge seconda legge di Maxwell (anche conosciuta come legge di Faraday o legge dell'induzione) stabilisce che:

$$e_{l_c} = \oint_{l_c} E * dl_c = - \iint_S \frac{\theta B}{\theta t} * ndS = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Dove Φ è il flusso magnetico concatenato con la linea chiusa l_c . La tensione elettrica e_{l_c} indotta sulla linea chiusa della variazione del flusso magnetico concatenato con l_c è detta **forza elettromotrice** (f.e.m.).

1.6.3. Legge di conservazione della carica

La carica elettrica non si crea e non si distrugge. Perciò la diminuzione della carica elettrica all'interno di un volume τ corrisponde alle cariche che lasciano τ fluendo attraverso la superficie chiusa S , superficie esterna di τ .

La **legge di conservazione della carica elettrica** afferma che questo ed è espressa dall'espressione:

$$\oint_S J \cdot \hat{n} dS = -\frac{dQ}{dt}$$

1.6.4. Legge di Gauss

Il **campo di induzione elettrica** o **campo spostamento elettrico** è definito dalla legge di Gauss.

Considerando una superficie chiusa S , che delimita il volume V , con n come versore normale alla superficie S . La legge di Gauss afferma che:

$$\oint_S D \cdot n dS = \iiint_V \rho dV = Q$$

1.7. Relazioni materiale

E , D e B , H descrivono fenomeni diversi dell'elettromagnetismo. E e D si riferiscono al fenomeno elettrico. B e H si riferiscono al fenomeno magnetico. D e H descrivono i due fenomeni, misurando ciò che li origina: la carica per D e il moto della carica per H . Gli effetti misurati da E e B sono, in entrambe i casi, le forze indotte. Essi dipendono da come i diversi materiali reagiscono. Inoltre, in base alle proprietà del materiale, ad un certo valore del campo E si induce un determinato moto di carica J . Le relazioni fra queste descrizioni sono spesso lineari. A volte, però, non lo sono, anche con relazioni di tipo isteretico.

Materiali lineari:

- $D = \varepsilon E$, dove ε è la costante dielettrica
- $B = \mu H$, dove μ è la permeabilità magnetica
- $J = \sigma E$, dove σ è la conducibilità elettrica

Materiali non lineari:

- $D = f_1(E)$
- $B = f_2(H)$
- $J = f_3(E)$

La costante dielettrica ε e la permeabilità magnetica μ di un materiale sono espresse per mezzo dei loro valori relativi ε_r , μ_r in riferimento al loro valore nel vuoto ε_0 , μ_0 :

- $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$, dove $\varepsilon_0 = 8,856 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$ (Farad/metro)
- $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$, dove $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{H}{m}$ (Henry/metro)

Le variazioni tra materiali differenti di ε , μ e σ sono molto diverse:

- Per la costante dielettrica ε , la variazione massima tra due materiali è di circa 10^3 (3 ordini di grandezza)
- Per la permeabilità magnetica μ , la variazione massima tra due materiali è di circa 10^5 (5 ordini di grandezza)
- Per la conducibilità elettrica σ , la variazione massima tra due materiali è di circa 10^{23} (23 ordini di grandezza)

1.7.1. Esempi

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$$

Materiale	ε_r
Vuoto	1
Aria	~ 1
Plastica	2 – 5
Vetro	4 – 8
Acqua	80

$$B = \mu H = \mu_r \mu_0 H$$

Materiale	μ_r
Vuoto	1
Rame, oro	~ 1
Ferrite	> 1000

2. Circuiti elettrici

Ipotesi per l'analisi di un circuito elettrico:

1. $\frac{dB}{dt} = 0$ e $\frac{dD}{dt} = 0$, dove
 - $\frac{dB}{dt}$ è la variazione del campo magnetico nel tempo
 - $\frac{dD}{dt}$ è la variazione dell'induzione elettrica nel tempo
2. Circuito elettrico a parametri concentrati $L_c \ll \lambda$, dove:
 - L_c è la lunghezza caratteristica del circuito
 - $\lambda = \frac{c}{f}$ = lunghezza d'onda [m] ($c \simeq 3 * 10^8$)

Sotto le precedenti ipotesi, gli elementi del circuito verranno rappresentati da multipoli. Il circuito è una **interconnessione di multipoli**.

- I collegamenti tra elementi di un circuito sono considerati **collegamenti ideali**
- Un **nodo** è l'interconnessione tra 2 o più elementi (morsetti dell'elemento)
- Un **ramo** è un elemento collegato tra due nodi
- La **maglia** è un percorso chiuso di rami
 - Se una maglia non è tagliata da rami, viene detta **maglia elementare**
 - La maglia generalizzata è un percorso aperto di un numero qualsiasi di elementi chiuso da una variabile

Le grandezze fondamentali di un circuito sono l'intensità di corrente $i(t)$ e la tensione della corrente $v(t)$.

2.1. Grandezze derivate

La potenza elettrica:

$$p(t) = v(t) * i(t) \text{ [W]}$$

L'energia:

$$w(t) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \text{ [J]}$$

2.2. Convenzioni

Un elemento può essere rappresentato usando due convenzioni:

- Utilizzatore, ovvero il verso della intensità di corrente è **opposto** a quello della tensione
- Generatore, ovvero il verso della intensità di corrente è **uguale** a quello della tensione

Risolvere un circuito significa trovare tutte le grandezze caratteristiche $i(t)$, $v(t)$, etc.... Per fare ciò usiamo diversi strumenti:

- Leggi di Kirchhoff per analizzare la topologia del circuito
- Equazioni costitutive per analizzare i singoli elementi

2.3. Leggi di Kirchhoff

2.3.1. Legge di Kirchhoff delle tensioni (LKT)

$$\oint_l E \cdot dl = - \iint_S \frac{dB}{dt} \cdot \hat{n} dS = 0$$

dove E è un campo conservativo.

La somma algebrica delle tensioni lungo una linea chiusa è 0.

$$\sum_{k=1}^N v_{k(t)} = 0, \forall t$$

dove N è il numero di elementi lungo la linea chiusa.

2.3.2. Legge di Kirchhoff delle correnti (LKC)

$$\oiint_S \left(J + \frac{dD}{dt} \right) \hat{n} dS = 0$$

La sommatoria delle correnti entranti è pari alla sommatoria delle correnti uscenti dalla superficie chiusa.

$$\sum_{j=1}^N i_j = \sum_{k=1}^M i_k$$

dove:

- $\sum_{j=1}^N i_j$ sono le correnti entranti
- $\sum_{k=1}^M i_k$ sono le correnti uscenti

... e si può riscrivere come:

$$\sum_{k=1}^N \pm i_k = 0$$

dove le correnti positive sono quelle entranti, mentre quelle negative rappresentano le correnti uscenti.

2.4. Teorema di Tellegen

La somma delle potenze generate all'interno di un circuito è pari alla somma delle potenze assorbite:

$$\sum_{i=1}^N P_i = \sum_{k=1}^M P_k$$

dove:

- N è il numero di elementi a convenzione di generatore
- M è il numero di elementi a convenzione di utilizzatore

Un'altra forma del teorema è:

$$\sum_{p=1}^L v_p i_p = 0$$

dove:

- L è il numero di lati nella rete

3. Componenti elettrici

3.1. Classificazione

Un componente può essere classificato:

1. in base alla energia assorbita:

- **Passivo**, o componente carico se $E_a(\text{energia assorbita}) = \int_{-\infty}^t p(t)dt \geq 0$
- **Attivo**, o componente generatore se l'energia assorbita è < 0

2. in base alla capacità di mantenere uno stato:

- **Senza memoria**, se l'equazione costitutiva all'istante t dipende solo da tensioni e correnti dell'istante t
- **Con memoria**, se l'equazione costitutiva all'istante t non dipende solo da tensioni e correnti dell'istante t

3.2. Resistore

Usa la convenzione dell'utilizzatore, la sua equazione costitutiva è:

$$v(t) = Ri(t)$$

Anche detta 1° legge di Ohm. Il resistore è un componente lineare e la sua equazione costitutiva dipende da una costante R che simboleggia la resistenza, la quale ha unità di misura "Ohm" $[\Omega]$. La prima legge può essere riscritta come $i(t) = \frac{1}{R}v(t) = Gv(t)$ dove G indica la conduttanza, che viene misurata in "Siemens" $[S]$.

La 2° legge di Ohm indica la relazione tra la resistenza, il materiale fisico di cui è composto il componente e le sue dimensioni:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

dove:

- ρ è la resistività $[\Omega\text{m}]$, una costante che varia in base al materiale
- l è la lunghezza $[\text{m}]$ della resistenza
- S è la sezione $[\text{m}^2]$ della resistenza

La potenza generata dal componente è:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

Questa formula è detta "effetto Joule". L'energia assorbita è:

$$E_a = w(t) = \int_{-\infty}^t p(t)dt = \int_{-\infty}^t \frac{v^2(t)}{R}dt \geq 0$$

ed è sempre ≥ 0 perciò il componente è **passivo**.

Se $R = 0$, significa che per qualsiasi intensità di corrente ($i(t)$), la differenza di potenziale ($v(t)$) tra il punto A e il punto B del componente è nulla. A e B sono collegati e questa situazione viene detta **cortocircuito**. Se $R = \infty$, allora la differenza di potenziale sarebbe ∞ , perciò il circuito risulta **aperto**.

3.3. Condensatore

Usa la convenzione dell'utilizzatore, la sua equazione costitutiva è:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

Un condensatore è formato da due piastre fatte da un materiale conduttore, dette **armature** e un materiale isolante posto tra esse, detto **dielettrico**. Il condensatore è un componente lineare e la costante C indica la capacità, ed è misurata in Farad [F]. La capacità è il risultato di questa formula:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

dove:

- ε è la permittività del dielettrico, e si misura in $\left[\frac{F}{m}\right]$
- S è la superficie delle armature $[m^2]$
- d è la distanza tra le due armature $[m]$

$$v(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{C} i(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{C} i(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{1}{C} i(\tau) d\tau$$

L'equazione costitutiva del condensatore dipende da istanti precedenti a t , perciò è detto un componente **con memoria**. La potenza generata dal componente è:

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t)C \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \begin{cases} > 0 \text{ potenza assorbita} \\ < 0 \text{ potenza erogata} \end{cases}$$

L'energia assorbita dal componente è:

$$w(t) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)C \frac{dv(t)}{dt} dt = C \int_{v_1}^{v_2} v(t) dv = \frac{1}{2} C [v^2(t)]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} C [V_2^2 - V_1^2]$$

che calcolata in $t_1 = 0$ viene:

$$w(t) = \frac{1}{2} C [V_2^2 - 0] \geq 0$$

ed è sempre ≥ 0 perciò il componente è **passivo**.

Nel caso del condensatore, la tensione è detta "variabile di stato", perchè descrive lo stato energetico del componente. Essa non può variare istantaneamente.

3.4. Induttore

Usa la convenzione dell'utilizzatore, la sua equazione costitutiva è:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Un induttore è formato da un materiale ferromagnetico, attorno al quale viene avvolto un conduttore. L'induttore è un componente lineare e la costante L indica l'induttanza, che viene misurata in Henry [H].

$$i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{L} v(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{L} v(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{1}{L} v(\tau) d\tau$$

Il componente è detto **con memoria**. A differenza del condensatore, che immagazzina l'energia con un campo elettrico, l'induttore lo fa con un campo magnetico.

$$p(t) = v(t)i(t) = i(t)L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \begin{cases} > 0 \text{ potenza assorbita} \\ < 0 \text{ potenza erogata} \end{cases}$$

3.5. Generatore indipendente di tensione

Usa la convenzione del generatore, la sua equazione costitutiva è:

$$v(t) = e \quad \forall t, i$$

La potenza generata dal componente è:

$$p(t) = v(t)i(t) = ei(t) \Rightarrow \begin{cases} > 0 \text{ potenza erogata} \\ < 0 \text{ potenza assorbita} \end{cases}$$

Se $e = 0$ si ha davanti un cortocircuito. In un generatore di tensione reale (esempio: una batteria), più la corrente aumenta, più la tensione diminuisce.

Un generatore indipendente di tensione si dice **passivato** quando $e = 0$.

3.6. Generatore indipendente di corrente

Usa la convenzione del generatore, la sua equazione costitutiva è:

$$i(t) = a \quad \forall t, v$$

La potenza generata dal componente è:

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t)a \Rightarrow \begin{cases} > 0 \text{ potenza erogata} \\ < 0 \text{ potenza assorbita} \end{cases}$$

Se $a = 0$ si ha davanti un circuito aperto. In un generatore di corrente reale (esempio: un pannello fotovoltaico), se aumenta la tensione, la corrente diminuisce.

Un generatore indipendente di corrente si dice **passivato** quando $a = 0$.

4. Collegamenti tra componenti

Esistono due tipi di collegamenti nell'ambito dei circuiti:

- **Serie**, due o più componenti in serie sono attraversati dalla stessa corrente
- **Parallelo**, due o più componenti in parallelo hanno la tensione costante ai capi

4.1. Resistori

4.1.1. Serie di resistori

$$v = v_1 + v_2 = R_1 i_1 + R_2 i_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2) i$$

Esiste una resistenza equivalente R_{eq} che permette di riassumere il comportamento di due o più resistori in serie in un unico resistore:

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^N R_k [\Omega]$$

Se $i(t)$ è costante, allora la tensione ai capi di un singolo resistore dipende esclusivamente dalla resistenza. Questo comportamento è usato per costruire un **partitore di tensione**.

4.1.2. Parallelo di resistori

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v}{R_3} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) v$$

La resistenza equivalente nel caso parallelo è:

$$R_{eq} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k} \right)^{-1} [\Omega]$$

Si può ottenere anche una conduttanza equivalente:

$$G_{eq} = \sum_{k=1}^N G_k [S]$$

Se $v(t)$ è costante, allora la corrente ai capi di un singolo resistore dipende esclusivamente dalla resistenza. Questo comportamento è usato per costruire un **partitore di corrente**.

4.2. Condensatori

4.2.1. Serie di condensatori

$$v = v_1 + v_2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt} = \frac{i_1}{C_1} + \frac{i_2}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) i$$

La capacità equivalente è:

$$C_{eq} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{C_k} \right)^{-1} [F]$$

4.2.2. Parallelo di condensatori

$$i = i_1 + i_2 = C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{dv_2}{dt} = (C_1 + C_2) \frac{dv}{dt}$$

La capacità equivalente è:

$$C_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N C_k [\text{F}]$$

4.3. Induttori

4.3.1. Serie di induttori

$$v = v_1 + v_2 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt}$$

La induttanza equivalente è:

$$L_{\text{eq}} = \sum_{k=1}^N L_k [\text{H}]$$

4.3.2. Parallelo di induttori

$$i = i_1 + i_2 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{v_1}{L_1} + \frac{v_2}{L_2} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) v$$

La induttanza equivalente è:

$$L_{\text{eq}} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{L_k} \right)^{-1} [\text{H}]$$

4.4. Generatori indipendenti di tensione

Per questi, soltanto il collegamento in serie è possibile. Collegandoli in parallelo, la **LKT** (legge di Kirchhoff delle tensioni) sarebbe violata. In serie:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = e_1(t) + e_2(t)$$

4.5. Generatori indipendenti di corrente

Per questi, soltanto il collegamento in parallelo è possibile. Collegandoli in serie, la **LKC** (legge di Kirchhoff delle correnti) sarebbe violata. In parallelo:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = a_1(t) + a_2(t)$$

4.6. Collegamento a stella

4.7. Collegamento a triangolo

4.8. Trasformazioni

Le formule per trasformare da una configurazione all'altra sono:

- Trasformazione **triangolo-stella**:

- $R_a = \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}$

- $R_b = \frac{R_{bc}R_{ab}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}$

- $R_c = \frac{R_{ca}R_{bc}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ca}}$

- Trasformazione **stella-triangolo**

- $R_{ab} = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_c}$

- $R_{bc} = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_a}$

- $R_{ca} = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_b}$

Se le resistenze sono equivalenti, la formula di trasformazione diminuisce sostanzialmente in complessità e diventa:

$$R_a = R_b = R_c = R_{\times} = \frac{R_{\triangle}}{3}$$

$$R_{ab} = R_{bc} = R_{ca} = R_{\triangle} = 3R_{\times}$$

5. Metodi di analisi

5.1. Metodo algebrico

Il metodo base per l'analisi dei circuiti è il metodo algebrico. Esso è composto dai seguenti passi.

1. Trovare gli N nodi e L lati
2. Individuare le $2L$ incognite (L tensioni e L correnti)
3. Individuare le L equazioni caratteristiche per ogni lato
4. Trovare $N - 1$ LKC ai nodi
5. Trovare $L - N + 1$ LKT alle maglie elementari
6. Risolvere il sistema di equazioni (formato da $2L$ incognite e $2L$ equazioni indipendenti)

5.2. Metodo dei potenziali di nodo

1. Assegnare un nodo di riferimento
2. Assegnare le tensioni a tutti i nodi eccetto quello di riferimento
3. Assegnare le correnti per ogni lato
4. Determinare le LKC a tutti i nodi eccetto quello di riferimento
5. Utilizzare le equazioni caratteristiche per scrivere le correnti di lato in funzione dei potenziali ai nodi
6. Sostituire le correnti calcolate nel punto (5) al punto (4) e risolvere le equazioni

5.3. Teorema della sovrapposizione degli effetti

Dato l'ipotesi di linearità, le variabili di rete (effetti) possono essere calcolate come la sommatoria dei singoli contributi delle cause (generatori) Un generatore alla volta, annullo gli altri e calcolo le incognite del circuito con il generatore isolato.

Nota bene: questo metodo non si può applicare al calcolo di potenze e altre quantità non lineari.

5.4. Teorema di Thévenin

Date le ipotesi di linearità e una rete lineare da semplificare senza generatori dipendenti, un circuito può essere rappresentato, rispetto a due morsetti generici, come un bipolo dato dalla serie di un generatore ideale di tensione ed un resistore in serie. Tale bipolo viene detto bipolo equivalente di Thévenin.

- Il valore del generatore di tensione equivalente E_{TH} coincide con il valore della tensione misurata ai morsetti del bipolo quando ad essi non viene collegato nessun carico.
- Il valore della resistenza equivalente R_{TH} coincide con il valore della resistenza misurabile ai morsetti del bipolo quando i generatori della rete da semplificare sono passivati.

5.5. Teorema di Norton

Date le medesime ipotesi del teorema di Thévenin, una rete lineare (circuito) può essere rappresentata, rispetto a due morsetti generici, come un bipolo dato dal parallelo di un generatore ideale di corrente ed un resistore. Tale bipolo viene detto bipolo equivalente di Norton.

- Il valore della corrente del generatore di Norton A_N coincide con la corrente che fluisce tra i morsetti del bipolo quando il carico è cortocircuitato.
- Il valore della resistenza equivalente di Norton R_N coincide con il valore di resistenza misurabile ai morsetti del bipolo quando i generatori della rete da semplificare sono passivati.

5.6. Teorema di Millman

Mentre i teoremi di Thévenin e Norton hanno validità generale (sotto alcune ipotesi), il teorema di Millman si applica a circuiti di una specifica tipologia. L'ipotesi fondamentale è quella in cui si analizza una rete lineare con un numero qualsiasi di lati tutti connessi in parallelo (soltanto 2 nodi).

La tensione tra i due nodi è pari al rapporto della sommatoria delle correnti di circuito di ogni lato sulla sommatoria delle conduttanze di ogni lato.

$$v_{ab} = \frac{\sum_{i=0}^K \frac{e_i}{R_i} + \sum_{j=1}^M i_j}{\sum_{p=1}^N \frac{1}{R_p}}$$